www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

EPREUVE PRATIQUE DE MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

(Note sur 20)

L'épreuve comporte deux parties indépendantes qui devront être rédigées sur 2 copies séparées : **copie 1, partie 1 ; copie 2, partie 2.** Chaque feuille devra comporter l'indication claire **"copie 1"** ou **"copie 2"** puisque les feuilles relatives à chacune des parties seront ramassées séparément.

PREMIERE PARTIE

(Note sur 5)

La durée prévue pour cette partie est de 45 minutes

Le thème général de cette épreuve concerne l'algorithmique et la programmation ; il porte plus particulièrement sur :

- *la mise en forme et l'analyse d'un problème simple ;*
- *la recherche d'algorithmes adaptés à ce problème ;*
- *la construction méthodique de programmes clairs et documentés ;*
- *l'évaluation critique des résultats.*

Le langage de programmation est le Pascal.

Soit n un entier naturel strictement positif. On considère la matrice carrée A, de n+1 lignes et de n+1 colonnes, dont les éléments sont définis par : $a_{i,j} = 2^i 3^j$ pour i, j dans [0,n]. On choisit de représenter A à l'aide d'un tableau à deux dimensions, tel que l'élément d'indices i et j ait la valeur $a_{i,j}$.

1- Décrire un algorithme de création du tableau représentant A n'utilisant que des multiplications et écrire le programme correspondant.

2- Calculer le nombre total de multiplications de votre algorithme. Discuter le résultat obtenu.

Dans les questions suivantes, on suppose que le tableau représentant A a été correctement créé. Les valeurs données et les valeurs calculées dont il est question sont des paramètres des procédures demandées.

3- Décrire un algorithme qui, étant donnés quatre indices i, j, k, l, calcule la valeur de $\text{pgcd}(a_{i,j}, a_{k,l})$. Ecrire la procédure correspondante.

4- Décrire un algorithme qui, étant donné un entier p dans $[1, 2^n 3^n]$, calcule les valeurs i et j telles que :

$(a_{i,j} \leq p)$ et $(a_{i,j} \geq a_{k,l}$, $\forall$ k,l tels que $a_{k,l} \leq p)$

Ecrire la procédure correspondante.

5- Modifier la procédure précédente pour calculer aussi les indices k et l du plus petit des majorants de p de la forme $2^i 3^j$.

Tournez la page S.V.P.

DEUXIEME PARTIE
(Note sur 15)

La durée prévue pour cette partie est de 2 heures 15 minutes

0. Introduction et Notations.

L'espace C^p est muni de la norme

$$\|x\| = \sum_{j=1}^{p} |x_j|. \tag{0.1}$$

On note $\mathcal{M}_p$ l'espace vectoriel des matrices carrées à coefficients dans C, à p lignes et p colonnes. L'identité dans $\mathcal{M}_p$ sera notée I_p. Soit $M \in \mathcal{M}_p$; soit m_{ik} le coefficient situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la k-ième colonne de M. On note

$$\|M\| = \max_{1 \le k \le p} \sum_{i=1}^{p} \|m_{ik}\|. \tag{0.2}$$

On admettra sans démonstration que $\| \ \|$ définit une norme sur $\mathcal{M}_p$ et que de plus, on a les inégalités suivantes :

$$\forall M \in \mathcal{M}_p, \quad \forall x \in C^p, \quad \|Mx\| \le \|M\| \, \|x\|. \tag{0.3}$$

$$\forall M \in \mathcal{M}_p, \quad \forall M' \in \mathcal{M}_p, \quad \|MM'\| \le \|M\| \, \|M'\|. \tag{0.4}$$

L'objet de ce problème est d'étudier pratiquement et théoriquement certaines méthodes d'approximation de la solution du système d'équations différentielles

$$\frac{du}{di} = Lu, \tag{0.5}$$

où $L \in \mathcal{M}_p$, u est une fonction de $\mathbf{R}^+$ dans C^p qui vérifie la condition initiale

$$u(0) = u_0. \tag{0.6}$$

On sait que pour tout L dans $\mathcal{M}_p$ et pour tout u_0 dans C^p, il existe une unique fonction u continûment différentiable de $\mathbf{R}^+$ dans C^p qui vérifie (0.5) pour $i > 0$, et (0.6). De plus cette fonction est indéfiniment différentiable.

Les méthodes d'approximation étudiées ici sont construites comme suit : on se donne deux polynômes ρ et σ à coefficients réels et premiers entre eux :

$$\rho(X) = \sum_{j=0}^{r} a_j X^j \quad ; \quad \sigma(X) = \sum_{j=0}^{r} b_j X^j. \tag{0.7}$$

On supposera dans tout ce qui suit que $r \ge 1$ et

$$a_r \neq 0 \quad ; \quad \sum_{j=0}^{r-1} |a_j| \neq 0 \quad ; \quad |a_0| + |b_0| \neq 0. \tag{0.8}$$

Etant donné un paramètre réel et strictement positif h, et r vecteurs $v(j;h)$ dans C^p $(0 \le j \le r-1)$, on considère la solution, si elle existe et est unique, de la récurrence

$$\sum_{j=0}^{r} a_j v(n+j;h) = h \sum_{j=0}^{r} b_j Lv(n+j;h). \tag{0.9}$$

Une méthode de récurrence ainsi définie sera appelée méthode (ρ, σ).

On étudiera principalement le cas $r = 2$ dans ce problème ; on utilisera alors la notation suivante, pour tout nombre complexe w tel que $a_2 - b_2 w \neq 0$:

$$\zeta_1(w) \text{ et } \zeta_2(w) \text{ sont les racines du trinôme } \rho(X) - w\sigma(X). \tag{0.10}$$

On dira que la méthode (ρ, σ) est convergente si la condition suivante est réalisée : pour tout $u_0 \in C^p$, pour tout $L \in \mathcal{M}_p$, et pour tout $T > 0$,

$$\lim_{h \to 0} \left[\max_{r \le n \le T/h} \|v(n;h) - u(nh)\| \right] = 0. \quad \text{dès que} \quad \lim_{h \to 0} \left[\max_{0 \le j \le r-1} \|v(j;h) - u_0\| \right] = 0. \tag{0.11}$$

On cherche des conditions sur ρ et σ qui assurent la convergence.

Tournez la page S.V.P.

1. Préliminaires

Q.1.1. Soit $M \in \mathcal{M}_p$ une matrice telle que $\|M\| < 1$; en utilisant (0.3), montrer que le noyau de $I_p + M$ est réduit à $\{0\}$.

Q.1.2. Soient $(v_k(n;h))_{1\le k\le p}$ les composantes de $v(n;h)$ dans la base canonique de C^p. On note $V(n;h)$ le vecteur de C'^p défini par

$$V(n;h) = \begin{pmatrix} v_1(n;h) \\ \vdots \\ v_p(n;h) \\ v_1(n+1;h) \\ \vdots \\ v_p(n+1;h) \\ \vdots \\ \vdots \\ v_1(n+r-1;h) \\ \vdots \\ v_p(n+r-1;h) \end{pmatrix} . \qquad (1.2)$$

Soit L dans $\mathcal{M}_p$. On pose

$$h^* = \begin{cases} |a_r|\left(|b_r|\,\|L\|\right)^{-1} & \text{si } |b_r|\,\|L\| > 0 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que pour tout h dans $]0,h^*[$, la récurrence (0.9) possède une solution unique, et qu'il existe un endomorphisme $R(hL)$ de C'^p dans lui même tel que

$$V(n+1;h) = R(hL)V(n;h), \forall n \ge 0.$$

Q.1.3. On suppose jusqu'à la fin de cette première partie que

$$(1.3) \qquad r = 2, \quad p = 1, \quad Lu = zu, \quad z \in \mathbf{C}, \quad h \in]0,h^*[.$$

Donner la matrice de l'opérateur $R(hL)$.

Q.1.4. Avec la notation (0.10) montrer que $v(n;h) = \left[\zeta_j(hz)\right]^n$ est solution particulière de (0.9), pour $j = 1$ ou 2.

Q.1.5. Donner explicitement $v(n;h)$ en fonction de $v(0;h)$, $v(1;h)$, n et des $\zeta_j(hz)$ s'ils sont distincts, et non nuls. Que devient la formule si l'un des ζ_j est nul ?

2. Ordre

On introduit une fonction de la variable réelle x : $$(2.1) \qquad f(x) = \rho(e^x) - x\sigma(e^x).$$

On appelle ordre de la méthode (ρ,σ) le plus grand entier k tel que $d^j f/dx^j(0) = 0$, pour tout $j \le k$.

Q.2.1. Montrer qu'il existe pour tout k des polynômes ρ_k et σ_k de degré au plus r tels que

$$(2.2) \qquad \frac{d^k f}{dx^k} = \rho_k(e^x) - x\sigma_k(e^x).$$

$$\text{On posera} \qquad \rho_k(X) = \sum_{j=0}^{r} a_{kj}X^j \quad ; \quad \sigma_k(X) = \sum_{j=0}^{r} b_{kj}X^j.$$

Q.2.2. Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur ρ et σ pour que la méthode (ρ,σ) soit d'ordre 1.

On dira qu'une méthode (ρ,σ) est consistante si elle est d'ordre au moins égal à 1.

Q.2.3. Donner pour $r = 1$ toutes les méthodes (ρ,σ) consistantes. Sont-elles toutes exactement d'ordre 1 ?

Q.2.4. On fixe $r = 2$; calculer les coefficients a_{kj} des polynômes ρ_k pour $k \le 4$, les coefficients b_{kj} des σ_k pour $k \le 3$ et la valeur de $\rho_k(1)$ pour $k \le 4$ en fonction des a_j et des b_j. La réponse sera disposée dans un tableau du modèle suivant :

T.S.V.P

	a_{i2}	a_{i1}	a_{i0}	b_{i2}	b_{i1}	b_{i0}	$\rho_i(1)$
0	a_2	a_1	a_0	b_2	b_1	b_0	$a_2+a_1+a_0$
1							
2							
3							
4							

Q.2.5. Montrer que la méthode AB2 définie par

$$\rho(X) = X^2 - X \quad , \quad \sigma(X) = \frac{3X}{2} - \frac{1}{2}$$

est exactement d'ordre 2.

Q.2.6. Montrer que la méthode AM2 définie par

$$\rho(X) = X^2 - X \quad , \quad \sigma(X) = \frac{5X^2}{12} + \frac{2X}{3} - \frac{1}{12}$$

est exactement d'ordre 3.

Q.2.7. Montrer que la méthode FD2 définie par

$$\rho(X) = X^2 - 3X + 2 \quad , \quad \sigma(X) = \frac{X}{2} - \frac{3}{2}$$

est exactement d'ordre 2.

3. Essais numériques

Dans toute cette partie, on fait l'hypothèse 1.3.

Q.3.1. On demande de calculer $v(n;h)$ solution de (0.9) en assignant les valeurs suivantes aux paramètres et aux données :

$$v(0;h) = 1; \tag{3.1}$$

$$v(1;h) = \exp(zh); \tag{3.2}$$

$$z = 1. \tag{3.3}$$

On prendra successivement comme valeur des paramètres n et h les valeurs

$$n = 5 \quad \text{et} \quad h = 2 \times 10^{-1}; \tag{3.4}$$

$$n = 10 \quad \text{et} \quad h = 10^{-1}. \tag{3.5}$$

On donnera le résultat numérique pour chacune des trois méthodes AB2, AM2 et FD2 décrites aux questions Q.2.5, Q.2.6 et Q.2.7. Les résultats seront présentés dans un tableau du type suivant :

	AB2	AB2	AM2	AM2	FD2	FD2
n	5	10	5	10	5	10
h	0,2	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1
$v(n;h)$						
$v(n;h) - \exp(z)$						
$\lvert(v(n;h) - e^z)/e^z\rvert$						

Les candidats ont deux manières distinctes de calculer $v(n;h)$; l'une consiste à programmer itérativement la récurrence (0.9) et l'autre à utiliser la formule trouvée en Q.1.5. ; ces deux méthodes sont également acceptables pour les correcteurs. Les candidats en choisiront une seule, et indiqueront explicitement laquelle ils ont prise.

4. Stabilité

Dans toute cette partie, on se place sous les hypothèses (1.3). La méthode (ρ, σ) considérée sera prise consistante dans toute cette partie.

Q.4.1. Montrer que ρ a pour racines $\zeta_1(0) = 1$ et un nombre $\zeta_2(0)$ qu'on donnera en fonction de a_2 et a_0.

Q.4.2. On suppose $\zeta_2(0) \neq 0$. Soit $\Delta(w)$ le discriminant de $\rho(X) - w\sigma(X)$. Montrer qu'il existe un nombre R strictement positif, ne dépendant que de ρ et σ tel que

$$|w| \leq R \Longrightarrow \mathrm{Re}(\Delta(w)) > 0.$$

Q.4.3. Montrer qu'il existe une constante K, un nombre réel strictement positif $R' < R$ et une numérotation des racines de $\rho(X) - w\sigma(X)$ tels que pour tout nombre complexe w vérifiant $|w| \leq R'$ on ait

$$|\zeta_j(w) - \zeta_j(0)| \leq K|w|. \tag{4.1}$$

Tournez la page S.V.P.

Q.4.4. On dira que la méthode (ρ, σ) est stable si $|\zeta_2(0)| < 1$. Dans ce cas, montrer en utilisant la formule trouvée en Q.1.5 qu'il existe des constantes K_1 et h^{**} telles que pour toutes données initiales $v(0;h)$ et $v(1;h)$ dans C, pour tout z dans C, pour tout $n \geq 2$, et pour tout h vérifiant $h|z| \leq h^{**}$ on ait l'inégalité

$$|v(n;h)| \leq K_1 \exp(Knh|z|)\big(|v(0;h)| + |v(1;h)|\big). \tag{4.2}$$

Q.4.5. Soit (ρ, σ) une méthode stable. Montrer qu'il existe une constante K_2 telle que pour tout $h \in]0, h^{**}]$, $\|R(hz)^n\| \leq K_2 \exp(nhK|z|)$.

Q.4.6. Expliquer le comportement numérique de la méthode FD2.

5. Précision et Convergence

Dans cette partie, on suppose les conditions (1.3) remplies, sauf à la dernière question. On fixe $z \in \mathbb{C}$ et $T > 0$, dans toute cette partie.

Q.5.1. On pose $v'(n;h) = u_0 \exp(nhz)$, et $e(n;h) = \sum_{j=0}^{r} [a_j - hzb_j]\, v'(n+j;h)$.

Soit une méthode (ρ, σ) d'ordre k. Montrer qu'il existe un nombre C tel que pour tout h tel que $|h| \leq 1$ et pour tout n tel que $nh \leq T$, on ait $|e(n;h)| \leq C|h|^{k+1}$.

Q.5.2. Soit $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite quelconque de nombres complexes : montrer que si $h < h^*$, la récurrence

$$\sum_{j=0}^{r} [a_j - hzb_j]\, y(n+j;h) = \epsilon_n$$

possède une unique solution ; si on pose $Y(n;h) = \begin{pmatrix} y(n;h) \\ y(n+1;h) \end{pmatrix}$

il existe un vecteur $E_n \in \mathbb{C}^2$. qu'on donnera, tel que $Y(n+1;h) = R(hz)Y(n;h) + E_n$.

Q.5.3. On suppose que la méthode (ρ, σ) est d'ordre $k \geq 1$, et stable. Montrer qu'il existe une constante C_1 telle que, pour tout n compris entre r et T/h,

$$|v(n;h) - u(nh)| \leq C_1\big(|v(0;h) - u_0| + |v(1;h) - u_0 \exp(hz)| + h^k\big).$$

Pour cela, on posera

$$y(n;h) = v'(n;h) - v(n;h)$$

et on utilisera les questions Q.4.5 et Q.5.2.

Q.5.4. On suppose maintenant que L est un élément diagonalisable de $\mathcal{M}_p$. Soit u la solution de (0.5) et (0.6) ; on pose

$$v'(n;h) = u(nh).$$

On suppose de plus que la méthode (ρ, σ) est stable et d'ordre $k \geq 1$, et que les conditions initiales $v(0;h)$ et $v(1;h)$ vérifient

$$\|v(0;h) - u_0| + v(1;h) - v'(1;h)\| \leq C_2 h^k,$$

Montrer que la méthode (ρ, σ) est convergente, et qu'il existe une constante C_3 telle que

$$\|v(n;h) - v'(n;h)\| \leq C_3 h^k.$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail